Multiplication Egyptienne

Jean Vuillemin *

Résumé

La Multiplication Egyptienne est éternelle. On la pratique, avec des chiffres Hiéroglyphes en base 10, dès la Haute Egypte. On la pratique maintenant en binaire, dans les milliards de circuits de notre brave nouveau monde numérique.

Elle tient en trois règles pour réduire le calcul du produit à une suite d'opérations primitives : médiation, duplication et addition. Cette suite ne dépend que des valeurs entières des opérandes. Elle est donc indépendante du système de numération choisi, d'où sa longévité.

Nous en soulignons l'intérêt pour apprendre l'Art du Calcul, à tout âge, en décimal, en binaire, et sur tout support écrit, manuel, mental, électronique.

1 Le Papyrus de Rhind

L'Égyptologue Écossais Rhind achète à Louxor un Papyrus qui porte maitenant son nom au British Museum. Le Papyrus date des Hyksos (vers - 1800). Son auteur, le scribe Ahmès, indique reprendre des documents du Moyen Empire (vers -2000).

C'est une initiation à l'Art du Calcul, avec près d'une centaine d'exemples pratiques, explicites et instructifs.

Le Papyrus est transcrit par Sethe [6] de sa numération Hiératique d'origine en Hiéroglyphes et en Décimal (fig. 1, 2). Il est ensuite analysé par Neugebauer [4] et par Guitel [1]. Le verdict de ces éminents historiens des mathématiques est *négatif*.

Neugebauer : *The role of Egyptian mathematics is probably best described as a retarding force upon numerical procedures [4].*

Geneviève Guitel souligne la discordance entre le titre (*Règles pour étudier la nature et comprendre tout ce qui existe, mystères et secrets*) et le contenu (*Solutions par le calcul à des problèmes posés par l'administration d'un grand Etat*). Elle montre que la représentation Hiéroglyphe des fractions par des sommes d'inverses de nombres entiers est une impasse : *cette conception très étroite a engagé les mathématiciens dans des calculs compliqués et décevants [1].*

Dans une seconde lecture du Papyrus de Rhind, nous ignorons tout ce qui concerne les fractions et le texte illustratif. Le fragment de fond ainsi extrait contient une dizaine d'exemples de produits entiers : leur algorithme commun est la Multiplication Egyptienne, qui tient une place unique dans l'Histoire du Calcul.

*Ecole Normale Supérieure, Paris.

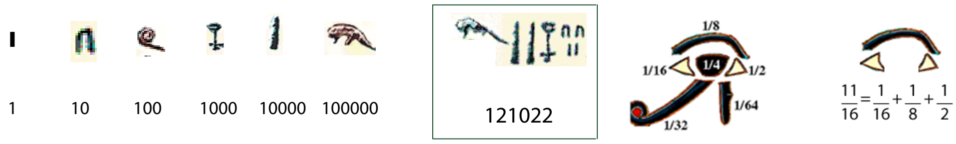


FIGURE 1 – Numération Hiéroglyphe : entiers et fractions binaires [6].

Elle réduit la multiplication à une suite d'opérations primitives, exclusivement déterminée par les valeurs de leurs opérandes entiers. Elle est donc indépendante du choix de la numération, modulo les trois opérations primitives (fig. 2).

Abstraction faite de la représentation des entiers, la Multiplication Egyptienne n'a pas pris une ride en plus de 40 siècles !

Elle tombe pourtant dans l'oubli pendant 20 siècles.

En 1703, Leibnitz publie son *Explication de l'arithmétique binaire* [3]. Il n'utilise qu'une seule page pour donner la table des nombres binaires et décrire les 4 opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$. Ses trois dernières pages sont des considérations historiques : *cette Arithmétique par 0 & 1 se trouve contenir le mystère des lignes d'un ancien Roi & Philosophe nommé Fohy, qu'on croit avoir vécu il y a plus de 4000 ans, & que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire & de leur Science* [3].

Toujours est-il que le Produit Binaire de Leibnitz n'est rien d'autre que la Multiplication Egyptienne, en base 2. Elle passe enfin du rang de *Curiosité Mathématique* à celui d'*Algorithme Fondamental* avec les premiers ordinateurs, sous l'influence de von Neumann [5] et de bien d'autres.

2 Numérations Hiéroglyphe et Hiératique

Tout nombre est la somme des chiffres qui le composent.

Un chiffre Hiéroglyphe spécifique représente chaque puissance de 10 (fig. 1).

Traduire un entier Hiéroglyphe en décimal est donc immédiat.

Traduire une fraction ne l'est pas. En effet, un chiffre Hiéroglyphe spécifique représente l'inverse $1/n$ de chaque entier $n \geq 2$; et il en faut un de plus pour $2/3$!

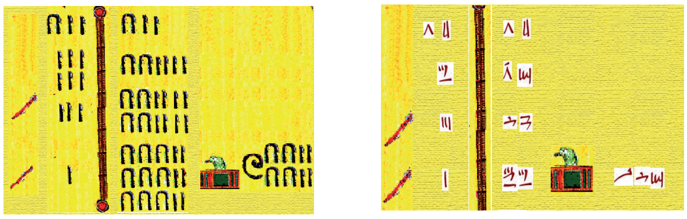
La numération Hiératique est une évolution plus concise du Hiéroglyphe. L'une se peint sur de fragiles papyrus. L'autre se grave sur de solides monuments. Le symbole hiératique pour le septième entier ressemble à notre 2 ; celui pour 2/3 à notre 7. Voir Guitel [1] pour en savoir plus.

2.1 Opérations Primitives

Pour apprendre à multiplier, notre scribe doit d'abord maitriser trois opérations.

Duplication $dup(a) = 2 \times a = a + a$ double l'entier $a \in \mathbf{N}$.

Médiation $med(a) = a \div 2$ divise par deux, et calcule la parité $a \pmod 2$.



12	12	
6	24	
3	48	
1	96	48
0		144

1100	1100	
110	11000	
11	110000	
1	1100000	110000
0		10010000

FIGURE 2 – Le carré de 12, en hiéroglyphe, hiératique [6], décimal et binaire.

Addition $add(a, b) = a + b$ est la somme entière.

Peu importe comment le scribe s'y prend : en hiéroglyphe, hiératique, décimal, sexagésimal ou binaire, tant que chaque résultat représente bien l'entier exact.

3 Multiplication Egyptienne

La Multiplication Egyptienne combine le produit et la somme par la formule

$$q = me(a, b, c) = a \times b + c. \tag{1}$$

Le produit entier est un cas particulier de ce "mul-add" : $a \times b = me(a, b, 0)$.

L'entier (1) est maintenu invariant pendant tout le calcul par trois règles :

$$\begin{array}{lrcl} (\mathbf{r0}) & me(0, b, c) & = & c \\ (\mathbf{r2}) & me(2a, b, c) & = & me(a, 2b, c) \\ (\mathbf{r1}) & me(1 + 2a, b, c) & = & me(a, 2b, b + c) \end{array}$$

Le résultat final, quand $(\mathbf{r0})$ s'applique, est l'invariant (1), soit $q = a \times b + c$.

3.1 Calcul Manuel

On trace le calcul en 3 colonnes (fig. 3), avec une ligne par étape ; on initialise la ligne 0 avec les opérandes (a, b, c). On passe de la ligne $t \in \mathbf{N}$ à la suivante en calculant : la médiation $a_{t+1} = a_t \div 2$; la duplication $b_{t+1} = b_t + b_t$; la somme $c_{t+1} = c_t + b_t$ si a_t est impair, et la copie $c_{t+1} = c_t$ sinon.

On termine quand $a_t = 0$, et le résultat final est alors $c_t = a \times b + c$.

opérandes	a	b	c	
$t=1$	$a \div 2$	$2b$	c_1	
$\dots$	$\dots$			
t	a_t	b_t	c_t	si a_t est pair, $c_{t+1} = c_t$ est une copie ;
$t+1$	$a_t \div 2$	$2b_t$	c_{t+1}	sinon, c'est la somme $c_{t+1} = c_t + b_t$.
$\dots$	$\dots$			
résultat	0		$a \times b + c$	

FIGURE 3 – Trace du produit $me(a, b, c) = a \times b + c$.

Chaque médiation élimine un bit de a, sauf quand $a = 0$. Le nombre de lignes de la trace est donc égal à la longueur de l'écriture binaire de l'opérande a, soit

$$l = \ l_2(a) = \lceil \log_2(a+1) \rceil. \tag{2}$$

Le calcul de $me(a, b, c)$ nécessite $l = \ l_2(a)$ médiations et $l - 1$ duplications ; le nombre nombre d'additions par ($\mathbf{r1}$) est le poids binaire ("Hamming weight") $w = \nu(a)$ de a, c'est à dire le nombre de bits non nuls dans l'écriture binaire de a.

3.2 Calcul Mental

3	b	
1	$2b$	b
0		$3b$

5	b	
1	$4b$	b
0		$5b$

7	b	
3	$2b$	b
1	$4b$	$3b$
0		$7b$

9	b	
1	$8b$	b
0		$9b$

FIGURE 4 – Traces courtes des produits par un chiffre impair.

Divers exemples du Papyrus donnent une trace courte du produit, réduite aux lignes dont l'opérande a est impair. Tout bon Scribe pratique la règle ($\mathbf{r2}$) mentalement [1], et il sait la répéter tant que a reste pair, et donc que c reste constant. La trace finale du calcul se réduit aux opérations avec a impair, et on remplace la règle ($\mathbf{r2}$) par son itérée

$$(\mathbf{r2}^*) \quad me(2^n a, b, c) \quad = \quad me(a, 2^n b, c), \text{ avec } a \text{ impair.}$$

La trace courte du calcul de $me(a, b, c)$ fait alterner les règles ($\mathbf{r2}^*$) et ($\mathbf{r1}$). Chaque alternance élimine un bit non nul de a. Il y en donc $s = \nu(a)$ en tout. La trace courte élimine toute ligne de la trace longue dont l'opérande en colonne (a) est pair.

Pour apprendre l'itérée ($\mathbf{r2}^*$), rien n'empêche qui s'y perd de noter le dernier triplet a_t, b_t, c_t dont on est sûr. Si a_t est pair, il suffira de gommer cette ligne inutile du rapport final ; mais le calcul peut reprendre, sans faute !

1. l'usage des doigts, de cailloux et abaques est autorisé.

11	11	
1	110	11
0		1001

$3 \times 3 = 9$

11	101	
1	1010	101
0		1111

$3 \times 5 = 15$

101	101	
10	1010	101
1	10100	101
0		11001

$5 \times 5 = 25$

FIGURE 5 – Les trois premiers exemples historiques de produits binaires donnés par Leibniz [3] en 1703 sont calculés ici par la Multiplication Egyptienne

3.3 Comparaison avec le Calcul Décimal

Pour maitriser le produit décimal, il faut mémoriser les 100 produits des chiffres de 0 à 9. C'est une étape aride : facile pour les uns, incertaine pour beaucoup.

Soit $a = \sum_{k<d} a_k 10^k$ un entier décimal ($a_k < 10$) de longueur

$$d = \ l_{10}(a) = \lceil \log_{10}(a+1) \rceil . \tag{3}$$

Le produit décimal $p = a \times b$ se calcule [2] on dressant le tableau des produits partiels de b par chacun des chiffres décalés $a_k 10^k$, et en sommant le tout. Les opérations élémentaires calculées sont d produits par chaque chiffre de a, et autant de décalages et additions.

La Multiplication Egyptienne calcule $3\ l_2(a)$ opérations primitives, soit environ $log_2(10) = 3,32 \cdots$ fois plus que le produit décimal. Mais elle peut servir de complément. La fig. 4 montre comment ceux qui ont un peu oublié leur table des produits peuvent recourir à la Multiplication Egyptienne pour continuer le calcul.

La version itérée ($\mathbf{r2}^*$) est d'autant plus courte que l'opérande a est creux ; elle bat le produit décimal quand $\nu(a) < \ l_{10}(a)$, par exemple si les trois quarts des bits de a sont nuls. Tout bon calculateur mental mélange à sa guise ces deux algorithmes, et bien d'autres.

4 Produit Binaire

C'est en binaire que la Multiplication Egyptienne prend tout son charme (fig. 2 et 5) car elle coïncide avec le Produit Binaire classique [3, 2], à la disposition des calculs près (fig. 5).

L'addition en base 2 est la plus simple de toutes [2]. Le cas particulier de la duplication n'est qu'un décalage vers les poids forts, avec insertion d'un 0 en poids faible. La médiation est un décalage dans l'autre sens, et la parité est le bit de poids faible ainsi expulsé.

Le calcul manuel des 3 opérations primitives devient alors simple et rapide.

Tout microprocesseur moderne calcule chacune des 3 en quelques nano secondes.

Par souci d'économie, la grande majorité des processeurs ne dispose pas de multiplicateur câblé. On les dote d'un multiplieur *logiciel* en compilant le code de

```
int     ME(unsigned int a, int b, int c)      // Calcule q = a × b + c.
{       while a > 0 {                          // Tant que a > 0, répèter :
        if (a % 2) {c = c + b ;}               // Addition si a est impair.
        a = a ≫ 1; b = b ≪ 1; }                // Médiation et Duplication
        return c ; }                           // Produit final q.
```

FIGURE 6 – Code C du Produit Binaire.

la fig. 6. C'est ainsi, que chaque micro seconde, des milliards de circuits de notre monde numérique calculent la Multiplication Egyptienne en base 2.

5 Conclusion

- La Multiplication Egyptienne ME n'a pas changé depuis le Papyrus. L'Algorithme d'Euclide (vers -300) pour calculer le PGCD est beaucoup mieux connu. Mais c'est presque 20 siècles plus tard !
- Nous proposons ici d'initier l'élève au calcul décimal par la ME, avant de passer graduellement au produit décimal, avec toutes ses tables. Les digressions pédagogiques, historiques et géographiques abondent. L'enfant qui connait le système décimal peut apprendre le Hiéroglyphe en quelques minutes : fig. 1
- Le binaire peut être enseigné très tôt, en même temps que le décimal. On peut ensuite apprendre le Produit Binaire en une heure : Leibnitz le fait en 6 lignes !
- L'informatique qui nous entoure ne fait que communiquer et traiter automatiquement des suites binaires ; bien plus rarement des nombres décimaux. Plus vite on le comprend, meilleures sont nos chances de survie dans le monde numérique à venir.

5.1 Remerciements

Merci à Timothy Bourke pour ses contributions à ce texte.

Références

[1] G. Guitel. *Histoire comparée des numérations écrites*. Flammarion, 1975.

[2] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, vol. 2, Seminumerical Algorithms*. Addison Wesley, 3-rd edition, 1997.

[3] G.W. Leibnitz. Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de fohy. 1703.

[4] O. Neugebauer. *The Exact Sciences in Antiquity*. Brown University Press, Providence, Rhode Island, 1957.

[5] John Von Neumann, A. W. Taub, and A. H. Taub. *The Collected Works of John Von Neumann : 6-Volume Set*, volume 5. Reader's Digest Young Families, 1963.

[6] K. Sethe. Von zahlen und zahlworten bei den alten ägyptern und was für andere völker und sprachen daraus zu lernen ist : ein beitrag zur geschichte von rechenkunst und sprache. Strassburg, 1916.